

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Четврти разред – А категорија

1. Постоји ли нелинеарна реална функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која има изводе било ког реда и при томе је

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{за све } n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in \mathbb{R}?$$

2. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такве да важи $f(x) \leq x^2$ за све $x \in \mathbb{N}$ и

$$m + n \mid f(m) - f(n) \quad \text{за све } m, n \in \mathbb{N}.$$

3. Две подударне кружнице k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2 редом секу се у тачкама A и B . Произвољна права кроз тачку A поново сече кружнице k_1 и k_2 редом у тачкама C и D . Нормале из O_1 и O_2 на праву CD редом секу тангенте у тачки A на кругове k_1 и k_2 у тачкама E и F . Даље, нормале из тачака E и F на праве O_1D и O_2C редом секу се у тачки P . Најзад, тачке Q и R су редом подножја нормала из D на O_1P и из C на O_2P . Доказати да центар O описаног круга троугла PQR лежи на правој AB .

4. Дато је $6n$ тачака на кружници, означених са A_1, \dots, A_{6n} у цикличном поретку, где је $n \geq 2$ природан број. Свака од тачака $A_1, A_2, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{4n+1}, A_{4n+2}$ обојена је плаво ако јој је индекс паран, а црвено ако је непаран. Свака од осталих тачака A_i обојена је црвено ако јој је индекс i паран, а плаво ако је непаран.

Скуп $3n$ дужи је *магичан* ако свака дуж има по један црвен и плав крај и никоје две дужи немају заједничку тачку (ни теме). Колико има магичних скупова дужи?

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.