

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све комплексне бројеве  $z = a + bi$  такве да су  $a$  и  $b$  цели бројеви и да важи

$$z^{2020} + |z| = \bar{z} + 2^{2020}.$$

2. Фигура *паук* креће се по шаховској табли ( $8 \times 8$ ) тако што у сваком потезу скочи три реда десно и два горе, или два реда лево и један доле. Паука имамо право да поставимо било где. Колико највише потеза ова фигура може да направи?

3. Нека је  $n$  природан број, а  $p$  и  $q$  природни бројеви већи од 1. Број  $m$  је  $(p, q, n)$ -*псеудопалиндром* ако постоје природни бројеви  $a_0$  и  $a_n$  и ненегативни цели бројеви  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , сви мањи и од  $p$  и од  $q$ , такви да је

$$m = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_p = (a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n)_q + 1.$$

Наћи све  $(p, q, n)$ -псеудопалиндроме у којима је  $n \geq 2^{q-1} - 1$ .

(Са  $x = (d_k \dots d_1 d_0)_b$  означава се запис броја  $x \in \mathbb{N}$  у основи  $b$ , тј.  $x = d_k b^k + \dots + d_1 b + d_0$ .)

4. Тачка  $P$  унутар оштроуглог троугла  $ABC$  је таква да је  $\sphericalangle APB = 2 \sphericalangle ACB$ . Тачке  $P_a$  и  $P_b$  су редом симетричне тачки  $P$  у односу на праве  $BC$  и  $AC$ . Права  $P_a P_b$  сече описани круг троугла  $ABC$  у тачкама  $M$  и  $N$ , при чему су тачке  $P_a$  и  $P_b$  између  $M$  и  $N$ . Доказати да је  $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPN$ .

Време за рад: 240 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Сваки задатак вреди 25 бодова.