

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије**

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**

16. март 2019.

Први разред – Б категорија

- 1.** Дата су следећа три исказа о природном броју n :

- ако је n дељив са 3, онда је паран;
- n је дељив са 5 и непаран је;
- n није дељив са 3 или n није дељив са 5.

Одредити које све остатке при дељењу са 30 могу имати они природни бројеви n за које су тачна два од наведена три исказа, а један нетачан.

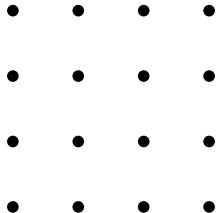
- 2.** Дат је $\triangle ABC$. На страницима AC и BC су одабране тачке M и N , редом, такве да важи $AM = BN$. Кружнице описане око $\triangle ANC$ и $\triangle BMC$ секу се још у тачки P (поред тачке C). Доказати да је права CP симетрала угла код темена C .
- 3.** За природан број n кажемо да је *згодан* ако цифре које учествују у његовом запису можемо разбити на две групе такве да су збиркови цифара у тим групама међусобно једнаки (нпр. број 121 јесте згодан јер у једну групу можемо ставити две јединице а у другу цифру 2, и тада важи $1 + 1 = 2$; број 2019 није згодан јер ће, при ма каквом разбијању, група у којој је цифра 9 имати већи збир него друга група).
- а) Одредити најмањи природан број n такав да су оба броја n и $n + 1$ згодни.
 - б) Да ли постоје три узастопна природна броја који су сви згодни?

- 4.** Дата је функција

$$f(x) = \frac{ax + 2}{3x - \frac{1}{a}}.$$

Одредити све могуће вредности реалног параметра a такве да за све реалне вредности x за које је $f(x)$ дефинисано важи да је и $f(f(x))$ дефинисано и $f(f(x)) = x$.

- 5.** Дата је квадратна решетка 4×4 сачињена од 16 тачака (видети слику). Колико има правоугаоника са теменима у овим тачкама? (Квадрате такође сматрамо специјалним случајевима правоугаоника.)



Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.