

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

16. март 2019.

Четврти разред – Б категорија

1. Колико има комплексних бројева  $z$  за које важи

$$z^{2019} = (z + 1)^{2019} = 1 \quad ?$$

2. Да ли број облика

$$200 \dots 0019,$$

где нула има произвољно много али бар две, може бити дељив са 2019?

3. У једном граду живе истинољупци (који увек говоре истину), лажови (који увек лажу) и нормалци (који некада лажу а некада говоре истину). У судници су се затекли тужилац, бранилац и оптужени, при чему је познато да је међу њима један истинољубац, један лажов и један нормалац (али није познато ко је ко). Притом суд има доказе да је злочин починио или оптужени, или тужилац, или бранилац, и такође је познато да особа која је починила злочин није лажов. Њих тројица су изјавили следеће:

- Оптужени: „Ја сам невин.“
- Бранилац: „Оптужени је невин.“
- Тужилац: „Оптужени је крив.“

Како суд није успео да донесе пресуду, позван је инспектор из другог града. Он је одлучио да ће разрешити не само ко је крив, него и ко је (од три актера) истинољубац, ко лажов, а ко нормалац. Најпре је питао следеће: „Тужиоче, јесте ли криви за овај злочин?“ Тужилац је одговорио, након чега инспектор и даље није имао све жељене информације, па је поставио друго питање: „Браниоче, да ли је тужилац крив за овај злочин?“ Бранилац је одговорио, и то је инспектору било довољно да сазна све што га је занимало. Одредити ко је крив за почињени злочин, као и ко је истинољубац, ко лажов а ко нормалац.

4. Дат је низ  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  дефинисан са

$$a_n = \sin^2 \pi \sqrt{n^2 + n}.$$

Одредити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

5. Да ли постоји четвороугао који има следећу особину: уколико обришемо ма које његово теме, уместо обрисаног темена увек можемо одабрати неку другу тачку у равни и на тај начин добити четвороугао подударан полазном?

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.