Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

16. март 2019.

Четврти разред – А категорија

1. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека су AA_0, BB_0 и CC_0 његове висине, A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, AC и AB, респективно, а O центар описане кружнице. Доказати да је обим $\triangle A_0B_0C_0$ мањи од $2(OA_1+OB_1+OC_1)$.

2. Дат је природан број n. Одредити колико постоји коначних низова $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ (где $t \in \mathbb{N}$ није унапред фиксирано) који испуњавају следећа три услова:

- $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- за све j, $1 \leqslant j \leqslant t-1$, важи $a_j \leqslant a_{j+1}+1$;
- не постоје j и k, $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant t-1$, за које важи $a_k \leqslant a_j = a_{k+1}$.

3. За природан број n означимо са x_n број који се добије узастопним записивањем свих природних бројева од 1 до n један иза другог (нпр. $x_{14} = 1234567891011121314$). Означимо са $f(n)$ остатак при дељењу броја x_n са 11. Да ли постоје природни бројеви t и n_0 такви да за све $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, важи $f(n+t) = f(n)$?

4. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да за све позитивне реалне бројеве x и y важи

$$f(x) + f(y) = \big(f(f(x)) + f(f(y))\big) f(xy),$$

и да притом само коначно много слика из кодомена има више (тј. бар 2) оригинала.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.