Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

16. март 2019.

Трећи разред – А категорија

1. Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан је са $x_1 = 16$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2019$ и, за $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+3} = \begin{cases} x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}x_{n+2}}, & \text{за } x_{n+1}, x_{n+2} \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказати да постоји природан број n за који важи $x_n = 0$, и одредити најмање такво n.

2. Наћи све бар четвороцифрене природне бројеве m за које постоји $b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ са следећом особином: уколико b упишемо између било које две цифре броја m, или допишемо на почетак или крај броја m, тако добијен број је увек потпун квадрат.

3. На страницама AB, BC, CD и DA паралелограма $ABCD$ дате су, редом, тачке P, Q, R, S, различите од темена, такве да је $PQRS$ правоугаоник и $PQ > PS$. Доказати: $\dfrac{PR}{PS} > \dfrac{AB}{AD}$.

4. Дат је квадрат $ABCD$. Разрежемо квадрат $ABCD$ на четири подударна квадрата (по дужима које настају спајањем средишта наспрамних ивица). Потом одаберимо један од тако насталих квадрата и разрежемо га на четири подударна квадрата. Потом одаберимо један од (укупно седам) тако насталих квадрата и разрежемо га на четири подударна квадрата. Назовимо *квад-поделом* колекцију квадрата која се добија понављањем овог поступка коначан број пута. Два квадрата у квад-подели су *суседна* ако страница једног од њих садржи страницу другог (могуће је и да се странице поклапају). Кажемо да је квад-подела *балансирана* ако је количник страница свака два суседна квадрата једнак 1, 2 или $\dfrac{1}{2}$. Одредити најмањи природан број k такав да квадрате сваке балансиране квад-поделе можемо обојити са k боја а да притом два суседна квадрата увек буду обојени различитим бојама.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.