

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

16. март 2019.

Други разред – А категорија

1. Дат је полином

$$P(x) = x^{2019} + 2018x^{2017} + 2016x + 2015.$$

Наћи све целе бројеве n такве да

$$P(n) \mid P(P(n) + 1).$$

2. Дат је n -елементан скуп X . Нека су Y_1, Y_2, \dots, Y_k различити подскупови скупа X такви да за све $i, j, i \neq j$, важи $|Y_i \cap Y_j| \leq 2$. Одредити максималну могућу вредност броја k .
3. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$ такав да $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ нису једнакостранични. Нека је E средиште дијагонале AC . Нека се нормала из D на Ојлерову праву за $\triangle ABC$ и нормала из B на Ојлерову праву за $\triangle ADC$ секу у тачки F . Нека је G тачка на дужи EF таква да важи $GF = 2GE$. Доказати: $GB = GD$.
4. Нека је p прост број облика $4t + 1$. Нека су $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ сви уређени парови природних бројева (a, b) за које важи $a < b \leq \frac{p-1}{2}$ и $p \mid a^2 + b^2$. Доказати:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k).$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.