

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

16. март 2019.

Први разред – А категорија

1. Дат је полином

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

са целобројним коефицијентима. Ако полином P има две различите целобројне нуле које нису позитивне (и можда још нула осим ове две) и притом важи $P(1) = 2$, доказати:

a) $a_0 = 0$;

b) $\sum_{2|i} a_i = \sum_{2 \nmid i} a_i$.

2. У $\triangle ABC$ тачке O и I представљају центар описане и уписане кружнице, редом. Нека је O_1 централносиметрична слика тачке O у односу на тачку I , и нека је I_1 централносиметрична слика тачке I у односу на тачку O . Ако O_1 лежи на висини из темена A а I_1 лежи на висини из темена B , доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.
3. Доказати да постоји бесконачно много парова различитих природних бројева (m, n) таквих да је збир свих позитивних делилаца броја m^2 једнак збиру свих позитивних делилаца броја n^2 .
4. Свака тачка простора је обојена једном од три боје. Доказати да се може одабрати једна од те три боје таква да, за сваки позитиван реалан број r , постоји троугао површине r чија су сва три темена обојена изабраном бојом.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.