

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Четврти разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$2^{x^2+2x-4x^4} = \frac{x^2}{x+1}.$$

2. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = 3$, $BC = 6$ и $\triangle ACD$ је једнакостраничан. Нека је O центар описане кружнице око четвороугла $ABCD$, а E пресек дијагонала AC и BD . Израчунати $\angle DOE$.
3. Нека је A скуп природних бројева такав да сви бројеви мањи од 256, као и сви степени двојке, припадају скупу A (преостали природни бројеви могу а не морају припадати скупу A). Посматрајмо сада бесконачан низ који се добија ако све бројеве из скупа A претворимо у бинарни запис и испишемо их један иза другог у растућем поретку. Доказати да у овом бесконачном низу постоји 2019 узастопних цифара од којих је тачно 1000 јединица.
4. Дата је диференцијабилна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која има бар две различите реалне нуле. Доказати да функција $2019f(x) + f'(x)$ има бар једну реалну нулу.
5. На скупу природних бројева већих од 9 дефинишемо функцију f на следећи начин: ако је $\overline{c_1c_2\dots c_s}$ ($s \geq 2$) декадни запис броја n , тада је $f(n)$ природан број који се добија заменом свих појава цифре c_1 у броју n цифром c_2 , и заменом свих појава цифре c_2 у броју n цифром c_1 ; уколико се након ове операције појаве водећа нула у резултујућем броју, она се брише. (На пример, $f(2375342) = 3275243$ и $f(502305) = 52350$.) Наћи све природне бројеве који се могу јавити као вредност израза $\frac{n}{f(n)}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.