

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Трећи разред – А категорија

1. За све $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ доказати неједнакост:

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x).$$

2. Квадратна таблица формата 6×6 је попуњена бројевима ± 1 на такав начин да, за свако поље таблице, производ бројева уписаних у том пољу и свим њему суседним пољима износи 1. (Под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме.) Доказати да је у сваком пољу таблице уписан број 1.
3. За дати скуп тачака у простору S , означимо са $\ell(S)$ скуп свих тачака у простору које леже на бар једној правој кроз две тачке скупа S . Нека се скуп S састоји од четири тачке које нису све у истој равни. Доказати да је број тачака које не припадају скупу $\ell(\ell(S))$ коначан и одредити тај број.
4. Наћи све непарне природне бројеве n за које важи

$$n = 2019 \underbrace{\varphi(\varphi(\dots \varphi(n) \dots))}_{10 \text{ пута}}.$$

5. За позитивне реалне бројеве a , b и c доказати неједнакост:

$$\sqrt{\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}} + \sqrt{\frac{b+2c+3a}{3b+2c+a}} + \sqrt{\frac{c+2a+3b}{3c+2a+b}} \geq 3.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.