

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Први разред – А категорија

1. У скупу целих бројева решити једначину

$$6x^3 + 7y^2 + 8z^3 = 66677888.$$

2. Дат је тетиван петоугао  $ABCDE$ . Нека су тачке  $F$ ,  $G$ ,  $H$  и  $I$  средишта дужи  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  и  $EA$ , респективно. Нека се праве  $FG$  и  $HI$  секу у тачки  $J$ , а праве  $AC$  и  $HI$  у тачки  $K$ . Доказати да се тачка  $K$  налази на кружници описаној око  $\triangle FCJ$ .

3. Колико решења има једначина

$$x - 2019\{x\} = 2019$$

у скупу реалних бројева? (За реалан број  $x$ , са  $[x]$  означавамо највећи цео број који није већи од  $x$ , а са  $\{x\}$  означавамо вредност  $x - [x]$ .)

4. Дати су конвексни четвороуглови  $ABCD$  и  $PQRS$ , при чему темена четвороугла  $PQRS$  леже на страницама или у унутрашњости четвороугла  $ABCD$ . Да ли збир дијагонала четвороугла  $PQRS$  може бити већи од збира дијагонала четвороугла  $ABCD$ ?

5. Два играча наизменично уписују један од бројева 473, 523, 573, 623, 673, 723, 773, 823 или 873 у неко слободно поље таблице  $3 \times 3$ , при чему сваки број може бити искоришћен само једном. Притом први играч у првом потезу не сме уписати број у централно поље. Игра се завршава када један од играча добије збир 2019 у било којој врсти, колони или дијагонали чија су сва три поља попуњена, и тада тај играч побеђује. Уколико се цела таблица попуни а нико не оствари тај збир, победник је други играч. Који играч има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.