

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити систем:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 16; \\ 3xy^2 + x^3 &= 260.\end{aligned}$$

2. Дат је правоугли $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, за чије странице $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ важи

$$c^2(3a + b) = 4a^3.$$

Одредити углове у $\triangle ABC$. (Решење изразити у облику експлицитних бројевних вредности.)

3. Одредити колико има функција $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ таквих да за све $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ важи

$$f(f(x)) = x.$$

4. Одредити све уређене тројке (a, b, c) реалних бројева таквих да функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задата са

$$f(x) = \sin(ax^2 + bx + c),$$

буде парна. (За функцију f кажемо да је *парна* ако за све x важи $f(x) = f(-x)$.)

5. Одредити колико једначина

$$y^3 + x^2y + 2xy^2 + x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + y + 2 = 0$$

има целобројних решења (x, y) за која важи $|x| \leq 20$ и $|y| \leq 18$.