Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$a2^{ax^2} - 2^{a+x^2} = 32$$

у скупу реалних бројева има тачно два решења и да се она разликују за 2.

2. За округлим столом седе n играча и играју следећу игру. Свако од њих држи по један папир на ком треба да напише једну реченицу, и потом проследи свој папир играчу који се налази k_1 места удесно. Сваки играч на добијени папир потом треба нешто да нацрта, и проследи папир играчу који се налази k_2 места удесно. Играчи потом на добијени папир треба да напишу по једну реченицу и проследе папир играчу који се налази k_3 места удесно итд. (У i-том кораку сваки играч треба да напише једну реченицу ако је i непарно, односно да нешто нацрта ако је i парно, и потом да проследи папир играчу који се налази k_i места удесно.) Један круг игре се завршава након n корака, при чему у последњем кораку играчи не прослеђују папир даље (него само напишу односно нацртају нешто). Круг се сматра валидним ако је на крају игре сваки играч писао или цртао тачно по једном на сваком од постојећих n папира.

a) Играчи желе да одиграју један валидан круг игре, на такав начин да током тог круга сваки играч тачно по једном прослеђује папир сваком од преосталих играча. За које вредности n је могуће одабрати $(n-1)$-орку параметара $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ да ово буде испуњено?

b) Играчи желе да одиграју два валидна круга игре, на такав начин да укупно током та два круга сваки играч тачно по једном прослеђује своју реченицу сваком од преосталих играча, и тачно по једном прослеђује свој цртеж сваком од преосталих играча. За које вредности n је могуће одабрати $(n-1)$-орке параметара $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ за први и други круг (не нужно исте за оба круга) да ово буде испуњено?

3. У унутрашњости задатог правилног n-тоугла $A_1A_2\ldots A_n$ одредити геометријско место тачака M за које важи

$$\measuredangle MA_1A_2 + \measuredangle MA_2A_3 + \cdots + \measuredangle MA_{n-1}A_n + \measuredangle MA_nA_1 = \frac{(n-2)\pi}{2}.$$

4. Доказати да постоји само коначан број степена двојке са збиром цифара мањим од 2018.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.