

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Други разред – А категорија

1. Никола је замислио 4 различита реална броја и на табли је записао производ свака два од њих (чиме се на табли нашло 6 бројева). Дуле је избрисао један од тих бројева, након чега је на табли остало 5 узастопних природних бројева. Који је број Дуле избрисао?

2. За природне бројеве k , m и n који испуњавају неједнакости $k \geq 2$ и $m < n$ важи

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k = \overline{0,x_1x_2\dots x_9x_1x_2\dots x_9x_1x_2\dots x_9\dots}$$

где су x_1, x_2, \dots, x_9 неке цифре (не нужно различите), и блок $\overline{x_1x_2\dots x_9}$ се периодично понавља бесконачно много пута. Наћи све могуће вредности за $\left(\frac{m}{n}\right)^k$.

3. Дат је $\triangle ABC$ у ком је угао код темена A туп и $AB \neq AC$. Симетрала угла код темена A сече страницу BC и описану кружницу у тачкама D и E , редом. Нека се кружнице над пречницима BC и DE секу у тачкама K и L . Доказати да тачка симетрична тачки A у односу на праву BC лежи на правој KL .

4. За дате природне бројеве b и n , Алиса и Боба играју следећу игру. У простору је дато n тачака у општем положају (никоје три нису колинеарне, никоје четири нису компланарне), и сваке две су повезане једном дужи. Они наизменично боје необојене дужи – најпре Алиса обоји једну дуж црвено, а затим Боба обоји b дужи плаво, и тако док има необојених дужи. Алиса побеђује ако креира црвени троугао, док Боба побеђује ако се игра заврши, а Алиса није креирала црвени троугао.

а) Ако важи $b < \sqrt{2n-2} - \frac{3}{2}$, доказати да Алиса има победничку стратегију.

б) Ако важи $b \geq 2\sqrt{n}$, доказати да Боба има победничку стратегију.