

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Први разред – А категорија

1. За природан број  $n$  означимо са  $x_n$  број који се добије узастопним записивањем свих природних бројева од 1 до  $n$  један иза другог (нпр.  $x_{14} = 1234567891011121314$ ). Нека је функција  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  дефинисана на следећи начин:  $f(n)$  је најмањи број цифара које треба избацити из записа броја  $x_n$  да би новодобијени број био дељив са 8 (дозвољено је избацити и све цифре броја  $x_n$ , при чему тада сматрамо да је новодобијени број једнак нули). Да ли постоје природни бројеви  $t$  и  $n_0$  такви да за све  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , важи  $f(n+t) = f(n)$ ?

2. Дат је природан број  $k$  и скупови  $A$ ,  $B$  и  $C$  такви да важи

$$|A \Delta B| = |B \Delta C| = |C \Delta A| = 2k.$$

Доказати да постоји јединствен скуп  $D$  за који важи

$$|A \Delta D| = |B \Delta D| = |C \Delta D| = k.$$

(За скупове  $X$  и  $Y$  означили смо  $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ , што се назива *симетрична разлика* скупова  $X$  и  $Y$ .)

3. У правоуглом  $\triangle ABC$  тачка  $D$  је средиште хипотенузе  $AB$ . Нека је  $k$  кружница описана око  $\triangle BCD$ , и нека је  $E$  произвољна тачка на краћем луку  $\widehat{BD}$ . На правој  $BC$  уочена је тачка  $F$  таква да је  $B$  између  $C$  и  $F$  и да притом важи  $\angle BEF = 2\angle BAF$ . Нека је  $k_1$  кружница описана око  $\triangle CEF$ . Доказати да једна од заједничких тангената кружница  $k$  и  $k_1$  пролази кроз тачку  $D$ .
4. Доказати да круг полупречника 100 с центром у координатном почетку садржи мање од 31600 тачака чије су обе координате целобројне. (Сматрамо да круг садржи неку тачку уколико се она налази на његовом рубу или у његовој унутрашњости.)