

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

24. фебруар 2018.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је  $S$  непразан скуп чији су сви елементи прости бројеви, и нека је испуњено: за све  $p, q \in S$  (не обавезно различите) бар један прост фактор броја  $pq + 1$  такође је у скупу  $S$ . Доказати да се у скупу  $S$  налази бар један прост број облика  $4k + 1$ .
2. Постоји ли реалан број  $x$  за који важи
$$\cos x < \cos 2x < \cos 4x \quad ?$$
3. Дат је једнакокраки  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC$ . Нека је  $k$  његова описана кружница, с центром у тачки  $O$ . На краћим луковима  $\widehat{AB}$  и  $\widehat{AC}$  дате су тачке  $X$  и  $Y$ , респективно, такве да важи  $\angle XBA = \angle YAC$ . Нека је  $X'$  тачка осносиметрична тачки  $X$  у односу на праву  $AB$ , и нека је  $Y'$  тачка осносиметрична тачки  $Y$  у односу на праву  $AC$ . Доказати:  $OX' = OY'$ .
4. Дата је празна табла  $2018 \times 2018$ . Играчи А и Б наизменично, почев од играча А, бирају по једну колону на табли (која не сме бити скроз попуњена) и на прво празно поље (гледано одозго надоле) уписују једну цифру од 0 до 9. Притом на пољима у првој врсти и у првој колони не сме бити уписана цифра 0. Након  $2018^2$  потеза, цифре у свакој врсти образују по један 2018-тоцифрен број, и цифре у свакој колони образују по један 2018-тоцифрен број. Играч А побеђује ако су бар два од ових 4036 бројева проста, а играч Б побеђује у супротном. Који играч има победничку стратегију?
5. Наћи све природне бројеве  $m$  и  $k$  такве да се исписивањем бројева  $m!$  и  $k!$  једног иза другог добија факторијал неког природног броја.