Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

24. фебруар 2018.

Први разред – А категорија

1. Ако су a, b и c природни бројеви такви да су бројеви

$$24^a + 2^b + 2018^c \qquad \text{и} \qquad 10^c + 3^a + 2018^b$$

дељиви са 7, доказати да број $30^b + 3^c + 2018^a$ није дељив са 7.

2. Наћи све цифре n и 2018-тоцифрене природне бројеве x, $x = \overline{a_{2017} \dots a_2 a_1 a_0}$, такве да важи

$$n \cdot x = \overline{(a_{2017} + n) \dots (a_2 + n)(a_1 + n)(a_0 + n)}.$$

3. Кружница уписана у $\triangle ABC$ додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F, редом. Уочена је тачка K са исте стране праве EF као и тачка A, и притом важи $\measuredangle KFE = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle KEF = \measuredangle ABC$. Доказати: $KD \perp BC$.

4. За скуп X, означимо $\mathscr{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$. (На пример: $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$, јер су подскупови скупа $\{1\}$ скупови $\varnothing$ и $\{1\}$; $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, јер скуп $\varnothing$ има тачно један подскуп, и то је $\varnothing$.) Са $\mathscr{P}^n(X)$ означавамо израз $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\dots \mathscr{P}(X) \dots))$, где је $\mathscr{P}$ примењено n пута. Наћи све двоелементне подскупове A скупа $\bigcup\limits_{n=1}^{2018} \mathscr{P}^n(\varnothing)$ такве да важи $A \subseteq \mathscr{P}(A)$.

5. Максим и Мина играју игру „Шампиони доколице“. Најпре Максим повлачи једну праву у равни, затим Мина повлачи праву различиту од претходно повучене, па онда опет Максим повлачи праву различиту од две претходно повучене, и тако наизменично. Игра се завршава када буде повучено укупно 18 правих (јасно, последњу ће повући Мина). Максим побеђује уколико постоји више од 100 различитих пресечних тачака повучених правих, а Мина побеђује у супротном (тј. ако има 100 или мање таквих тачака). Ко има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детально образложити.