Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Четврти разред – Б категорија

1. Дате су параболе $y = x^2+3x+6$ и $y = x^2+5x+3$. Наћи једначину њихове заједничке тангенте, као и тачке додира те тангенте са овим параболама.

2. Ако је $n^2 + 2^n$ прост број за неки природан број $n > 1$, доказати да је n дељив са 3 али није дељив са 6.

3. У свако поље таблице формата $n \times n$ потребно је уписати по један од бројева 1, 2, 3, ..., n на такав начин да се у свакој врсти, у свакој колони и на свакој дијагонали сваки од бројева појављује највише једанпут. (Притом посматрамо дијагонале свих могућих дужина: дакле, две дијагонале дужине n, четири дијагонале дужине $n-1$, четири дијагонале дужине $n-2$, ..., четири дијагонале дужине 2 и четири дијагонале дужине 1.) Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 4$;
b) $n = 5$?

4. Израчунати

$$\Bigg\lfloor \underbrace{\sqrt{2017+\sqrt{2017+\cdots+\sqrt{2017+\sqrt{2017}}}}}_{\text{2017 коренова}} \Bigg\rfloor .$$

(Са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број не већи од x.)

5. Дат је $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90^\circ$. Уочени су квадрати $AEDC$ и $CFGB$ у његовој спољашњости. Дуж EB суче дужи AC и AG редом у тачкама H и I. Дуж AG сече дуж BC у тачки J. Ако површина $\triangle AIB$ износи 2017, израчунати површину четвороугла $HCJI$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.