Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Четврти разред – А категорија

1. Дате су функције $f(x) = x^2 + x + 2$ и $g(x) = x^2 - x + 2$. Да ли постоји функција $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x)) \ ?$$

2. Шифра за закључавање Кикиног телефона формира се на следећи начин. На мрежи тачака 3×3 потребно је нацртати путању сачињену од неколико дужи, где свака дуж повезује неке две од посматраних тачака, и притом је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне. Током исцртавања путање, сваки пут када путања пређе преко неке тачке (било као унутрашње или крајње тачке неке дужи), та тачка више не може бити коришћена као крајња тачка ниједне наредне дужи (с изузетком услова да је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне), али јесте дозвољено да таква тачка буде унутрашња тачка наредних дужи. Кики жели да њена шифра на телефону испуњава следеће услове:

1° свих 9 тачака морају лежати на исцртаној путањи;

2° траг који путања остави је осносиметричан (под *трагом* подразумевамо унију дужи као геометријских објеката, дакле без информација о њиховом редоследу, смеру кретања и евентуалном преклапању неких делова различитих дужи);

3° на трагу путање постоје тачно две тачке (од посматраних 9) које су спојене само с по једном другом тачком.

Да ли Кики може да постави овакву шифру на свом телефону? Ако може, између колико шифара може да бира (до на ротацију и/или симетрију)?

3. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека су k_a, k_b и k_c његове приписане кружнице наспрам темена A, B и C, респективно. Нека су O и I центар описане и уписане кружнице. Означимо са t_a, t_b и t_c спољне заједничке тангенте парова кружница k_b и k_c, k_c и k_a, k_a и k_b, респективно, различите од правих BC, CA и AB. Доказати да центар уписане кружнице троугла одређеног правима t_a, t_b и t_c лежи на правој OI.

4. Наћи све природне бројеве n чији се скуп правих делилаца (тј. свих делилаца изузев n) може поделити у два дисјунктна скупа од по бар 2 елемента на такав начин да у једном скупу буду узастопни Фибоначијеви бројеви, а у другом узастопни троугаони бројеви.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.