Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је $\triangle ABC$. Тачке I_a, I_b и I_c су центри његових приписаних кружница, а тачке A_1, B_1 и C_1 су тачке додира тих приписаних кружница с одговарајућим страницама, редом. Доказати да се праве I_aA_1, I_bB_1 и I_cC_1 секу у једној тачки.

2. a) Доказати да постоји јединствена функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ таква да важи:

- $f(p) = 1$ за све просте бројеве p;
- $f(ab) = f(a)b + af(b)$ за све $a, b \in \mathbb{N}_0$;
- $f(0) = f(1) = 0$.

b) Одредити све природне бројеве n мање од 100 за које важи $f(f(n)) = 1$, где је f функција из дела под a).

3. Доказати да за сваки полином $P(x)$ са реалним коефицијентима постоје полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ такви да важи

$$P(x) = Q(x^2) + R((x+1)^2).$$

4. Свечаној вечери присуствује $6k + 3$ брачних парова, где је k природан број. Званице седе на $12k + 6$ равномерно распоређених места око округлог стола. Сваки мушкарац међу званицама има тачно једну сестру, а свака жена тачно једног брата (брат и сестра не могу бити у браку). Званице су распоређене за столом тако да сваки мушкарац седи ближе својој супрузи него својој сестри. Нека је $f(k)$ максималан могућ број жена које седе ближе свом брату него свом мужу, где максимум посматрамо над свим могућим распоредима и над свим могућим скуповима званица које испуњавају услове задатка. Доказати: $f(k) = 6k$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.