Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Други разред – А категорија

1. Колико највише страница може имати конвексан многоугао коме су дужине свих дијагонала једнаке?

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$x + y + \cos z = 3;$$
$$2x - y + \sin\{z\} = 1;$$
$$x - 3y - \operatorname{arctg} z^2 = -2.$$

(Са $\{z\}$ означавамо разломљени део броја z, тј. $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$.)

3. Нека функција odraz пресликава цифре $0, 1, 2, 5, 8$ у цифре $0, 1, 5, 2, 8$, редом. Природан број $n = \overline{t_k t_{k-1} \cdots t_1 t_0}$ називамо *одразабилан* ако су му све цифре из скупа $\{0, 1, 2, 5, 8\}$ и притом важи $t_0 \neq 0$, и дефинишемо

$$\operatorname{odraz}(n) = \overline{\operatorname{odraz}(t_0)\operatorname{odraz}(t_1)\cdots\operatorname{odraz}(t_{k-1})\operatorname{odraz}(t_k)}$$

(другим речима, функција odraz представља одраз у огледалу броја на екрану калкулатора). Наћи све природне бројеве n са следећим особинама:

1° n је одразабилан и $\operatorname{odraz}(n) = n$;

2° n^2 је одразабилан и $\operatorname{odraz}(n^2) = n^2$.

4. Барон Минхаузен живи у земљи Z у којој су градови у власти канцелара Ота и краља Фрање (сваки град у власништву тачно једног од њих). Ти градови су повезани неким путевима (путевима је могуће кретати се у оба смера), при чему: свака два града су повезана највише једним путем; сваки пут повезује град канцелара Ота са градом краља Фрање; сваки град је путем повезан са тачно k других градова, $k \geqslant 2$; из сваког града је путевима могуће стићи до сваког другог града. Земља Z је у рату са земљом W. Барон Минхаузен је јавио непријатељима из земље W да постоји пут такав да, уколико се он уништи, постојаће нека два града таква да више неће бити могуће стићи из једног у други преосталим путевима. Да ли Барон Минхаузен лаже?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.