

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

11. март 2017.

Први разред – А категорија

1. Да ли је могуће у свако поље таблице формата  $2017 \times 2017$  уписати по један од бројева  $1, 2, 3, \dots, 2017$  на такав начин да се у свакој врсти, у свакој колони и на свакој дијагонали сваки од бројева појављује највише једанпут? (Притом посматрамо дијагонали свих могућих дужина: дакле, две дијагонали дужине  $2017$ , четири дијагонали дужине  $2016$ , четири дијагонали дужине  $2015, \dots$ , четири дијагонали дужине  $2$  и четири дијагонали дужине  $1$ .)

2. Одредити све природне бројеве  $a$  и  $b$  за које је број

$$a^4b + 3b - 2a^2b^2 - a^2 - 3b^3$$

степен двојке.

3. Нека су  $a, b$  и  $c$  позитивни реални бројеви за које важи  $a + b + c = 3$ . Доказати:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + ab + bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + bc + ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + ca + ab}} \geq \sqrt{3}.$$

4. Доказати да у  $\triangle ABC$  симетрала  $\angle A$ , права одређена средиштима страница  $AC$  и  $BC$ , као и права одређена додирним тачкама уписане кружнице и страница  $AB$  и  $BC$ , све пролазе кроз исту тачку.