

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. фебруар 2017.

Трећи разред – А категорија

1. У датом троуглу полупречник уписане кружнице и полупречници приписаних кружница чине (у неком поретку) узастопне чланове геометријске прогресије. Одредити највећи угао тог троугла.

2. Наћи све вредности реалног параметра a за које нека два различита решења једначине

$$x^4 - ax^3 + x^2 + a = 0$$

(у скупу \mathbb{C}) имају збир једнак 1.

3. Нека $u, v, w, z \in \mathbb{C}$. Доказати неједнакост:

$$2 \operatorname{Re}(uz + vw) \leq 4(|u|^2 + |v|^2) + \frac{1}{4}(|z|^2 + |w|^2).$$

4. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које се скуп делилаца броја n може поделити на дисјунктне скупове (бар два) такве да је збир елемената у сваком од тих скупова потпун квадрат.

5. У простору је дат скуп S који се састоји од 100 тачака таквих да никоје 3 нису колинеарне и никоје 4 нису компланарне. Сваке две тачке скупа S спојене су дужима, а затим су дужи обојене тако да је тачно њих 2017 обојено црвеном, а преостале плавом бојом. Доказати да постоји троугао са теменима у S чија је тачно једна страница обојена плавом бојом или тетраедар са теменима у S чија је тачно једна ивица обојена црвеном бојом.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.