Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. фебруар 2017.

Други разред – А категорија

1. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да за све $x\in\mathbb{R}$ важи $f(x)\leqslant x$ и за све $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

2. Одредити све четвороцифрене природне бројеве $\overline{abcd}$, где различитим словима одговарају различите цифре, за које важи

$$\overline{abcd}=d^{a^2}+d^{b+c}-d^{a+b+c}-d^a+1.$$

3. Дат је $\triangle ABC$ у ком је $\measuredangle C$ туп. На његовим страницама уочене су тачке $D\in AC$, $E\in AB$ и $F\in BC$ такве да је четвороугао $CDEF$ ромб. Ако важи $AE=140$, $BE=84$ и $r=15\sqrt{3}$, где је r полупречник кружнице уписане у ромб $CDEF$, израчунати површину $\triangle ABC$.

4. Нека су a, b и c странице неког троугла. Доказати неједнакост

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c-a}+\frac{\sqrt{ca}}{c+a-b}\geqslant 3.$$

5. На великом столу се налазе чоколадице нумерисане бројевима од 1 до 2017, поређане редом по тим бројевима. Маша и Медвед играју следећу игру. Маша игра прва, њих двоје вуку потезе наизменично, и игра се завршава након 63 одиграна потеза. У k-том потезу играч који игра једе k узастопних чоколадица са стола. (Дакле, прво Маша једе 1 чоколадицу, па Медвед једе 2 узастопне чоколадице, па Маша 3 и тако даље, док у 63. потезу Маша не поједе 63 узастопне чоколадице, после чега преостаје једна чоколадица.) Маша побеђује ако последња преостала чоколадица има непаран број, а Медвед ако је тај број паран. Ко има победничку стратегију? (Напомена: узастопне чоколадице не морају нужно бити нумерисане узастопним природним бројевима, тј. чоколадице i и j за $i<j-1$ сматрамо узастопнима уколико су све чоколадице нумерисане бројевима између i и j већ поједене.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.