

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. фебруар 2017.

Први разред – А категорија

1. За коначне скупове  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  важи  $D \subseteq A \cup B$ ,  $D \subseteq C$  и

$$|A \Delta B| + |B \setminus C| + |C \setminus D| + |B \cap D| = |A|.$$

- а) Доказати да важи  $B \cup C \subseteq A$ .  
б) Да ли мора важити нека од инклузија  $B \subseteq C$  или  $C \subseteq B$ ?
2. Дата је кружница  $k$  с центром у тачки  $O$  и тачка  $T$  у њеној спољашњости. Тангенте из  $T$  на  $k$  додирују  $k$  у тачкама  $A$  и  $B$ . Нека је  $k'$  кружница с центром у тачки  $T$  која пролази кроз тачке  $A$  и  $B$ . Нека је  $C$  произвољна тачка на  $k'$  која је притом у спољашњости кружнице  $k$ , при чему праве  $CA$  и  $CB$  секу кружницу  $k$  још у тачкама  $D$  и  $E$ , редом, и важи поредак  $C - A - D$  и  $C - E - B$ . Доказати да је  $DE$  пречник кружнице  $k$ .
3. На једном кошаркашком турниру учествује 16 екипа које играју двокружно, тј. свака екипа игра по два пута са сваком другом. Пролаз на наредни турнир остварује првопласираних 8 екипа. Поредак екипа се одређује на основу броја победа, а уколико постоји више екипа с истим бројем победа, њихов међусобни поредак се утврђује жребом. Колико је најмање победа потребно једном тиму да би осигурао пролаз?
4. Одредити све природне бројеве  $n$  који имају следећа својства:  $n$  је дељив са 2 али не и са 4, збир цифара броја  $n$  је једнак 6, број делилаца броја  $n$  је једнак 8, збир делилаца броја  $n$  је дељив са 10 и  $n$  не даје остатак 12 нити 14 при дељењу са 16.
5. Дужине страница неког троугла су међусобно различити природни бројеви, а његова површина је такође природан број. Да ли тај троугао мора бити правоугли?

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.