

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Четврти разред – Б категорија

1. Дат је полином

$$P(x) = 3x^5 + ax^4 - 35x^3 + bx^2 + 32x + c$$

чије су две нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, и важи $x_3x_4x_5 = 2$. Наћи коефицијенте a , b и c и преостале нуле.

2. Теткица с Окружног такмичења поново пише по табли, овај пут по следећем обрасцу. На почетку је на табли написана променљива x . У једном кораку теткица бира произвољна два израза која постоје на табли (укључујући могућност да узме исти израз два пута) и на таблу дописује њихов производ. Колико најмање корака је потребно да би се на табли добио израз x^{1025} ?
3. Природан број n има следећу особину: за свако k из интервала $2 \leq k \leq m$ (где је m унапред фиксиран природан број) број kn је потпун k -ти степен (другим речима, $2n$ је потпун квадрат, $3n$ је потпун куб, ..., mn је потпун m -ти степен). Одредити највећи природан број m за који постоји такав природан број n .
4. За које вредности реалних параметара a и b систем

$$xyz + z = a;$$

$$xyz^2 + z = b;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева?

5. Тетраедар $ABCD$ има дужине ивица $AB = 1$ и $BD = 2$, а $\angle BAD$ и $\angle ABC$ су прави. Сфера додирује пљосни ABD и BCD у тачкама A и C , редом. Наћи полупречник те сфере.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.