Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Четврти разред – А категорија

1. Означимо са A', B' и C', редом, подножја висина из темена A, B и C у $\triangle ABC$. Нека су I_A, I_B и I_C центри уписаних кружница у $\triangle AB'C'$, $\triangle BA'C'$ и $\triangle CA'B'$, редом. Доказати да је ортоцентар $\triangle I_AI_BI_C$ уједно и центар уписане кружнице у $\triangle ABC$.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви. Познато је да за свако i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, постоји природан број k такав да важи $x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k-1} \geqslant 0$ (где индексе посматрамо циклично по модулу n). Доказати: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant 0$.

3. Дат је природан број n. Доказати да за сваки непаран број x постоји природан број y такав да важи $y^y \equiv x \pmod{2^n}$.

4. Кажемо да се многоугао $\mathscr{M}_0$ у равни може *обмотати са n копија* ако постоје многоуглови $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ подударни с многоуглом $\mathscr{M}_0$ такви да важи:

1° свака два многоугла $\mathscr{M}_i$ и $\mathscr{M}_j$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$, имају дисјунктне унутрашњости;

2° сваки од многоуглова $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ има бар једну заједничку рубну тачку с многоуглом $\mathscr{M}_0$;

3° $\bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{M}_i$ је многоугао такав да је строго у његовој унутрашњости садржан многоугао $\mathscr{M}_0$.

Да ли постоји многоугао којим се не може поплочати раван, а који се може обмотати са 8 копија?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.