

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Трећи разред – Б категорија

1. Дати су вектори $\vec{a} = (-3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (1, 1, 3)$. Одредити, ако постоји, реалан број r такав да вектор $(1, r, -2)$ гради угао од 60° са вектором $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{a})$.
2. Дата је трака 2015×1 подељена на јединичне квадратиће. Два играча наизменично уписују X у произвољан квадратић, под условом да он није већ попуњен. Добија први играч који постигне да након његовог потеза постоје бар 3 узастопна квадратића обележена словом X. Доказати да први играч има победничку стратегију.
3. Природни бројеви a , b и c су такви да је број $a + b + c$ прост и важи

$$ab + bc + ac \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Доказати: $a = b = c = 1$.

4. У правоуглом троуглу тежишне линије које одговарају катетама заклапају угао φ за који важи $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$. Наћи углове тог троугла.
5. За позитивне реалне бројеве a и b означимо

$$S(a, b) = \min \left(a, b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Наћи највећу могућу вредност израза $S(a, b)$ и за које a и b се та вредност достиже.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.