

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је $\triangle ABC$. Симетрала $\angle BAC$ сече страницу BC у тачки D . Нека је M средиште дужи BD . Уочимо кружницу k која пролази кроз тачку A , додирује страницу BC у тачки D , и сече дужи AM и AC у тачкама P и Q , редом $(P, Q \neq A)$. Доказати да су тачке B, P и Q колинеарне.
2. Да ли постоји природан број n такав да су $n - 2015$ и $\frac{n}{2015}$ природни бројеви који имају тачно 2015 делилаца?
3. У току је велики скуп n мудраца који седе за округлим столом. Сваки мудрац или увек лаже или увек говори истину. Места на којима мудраци седе су нумерисана од 1 до n почевши од неког места и идући редом у смеру казаљке на сату гледано одозго. Новинар, желећи да утврди који су мудраци лажљивци, ишао је редом око стола и интервјуисао мудраце, и за свако $k, k = 1, 2, \dots, n$, мудрац на k -том месту му је рекао да су следећих k мудраца од њега у смеру казаљке на сату гледано одозго сви лажљивци.
 - а) За које вредности n је могуће да мудраци дају овај скуп изјава?
 - б) За које вредности n (међу оним вредностима за које је овакав скуп изјава могућ) новинар и даље неће бити у стању да утврди за сваког мудраца да ли је лажљивац или истинољубац?
 - в) За $n = 2016$ одредити на којим местима седе мудраци истинољупци.
4. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која није константна таква да важи
$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = f(x)^2 + f(y)^2$$
 за све $x, y \in \mathbb{R}$. Доказати: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.