

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Други разред – А категорија

1. Одредити број пресликавања $f : \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ која задовољавају:
- $f(x, x) = x$ за све $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ и
 - $f(x, f(x, y)) = f(x, y)$ за све $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да важи

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = x^2 + f(y)^2 \text{ за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Наћи сва решења (p, a, b, m) једначине

$$p^2 + 4^a 9^b = m^2,$$

где је p прост број и $a, b, m \in \mathbb{N}_0$.

4. Дат је $\triangle ABC$. Нека је D средиште дужи BC . Нека је k кружница описана око $\triangle ABD$. На луку \widehat{AB} ком не припада тачка D уочимо тачку E такву да важи $\angle EDB = \angle DAC$. Нека нормала из A на AD сече праву BC у тачки F . Нека је G друга пресечна тачка праве FE са k ; изузетно, ако је FE тангента на k , тада дефинишимо $G \equiv E$. Доказати: $DG = DB$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.