Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је полином $(x+1)^n - x^n - 1$ дељив полиномом

a) $x^2 + x + 1$;

b) $(x^2 + x + 1)^2$.

2. Одредити све тројке (p, q, r) различитих простих бројева за које је

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{p+q} + \frac{101}{p+q+r}$$

природан број.

3. Дат је јединични квадрат $ABCD$. Нека $d(U, VW)$ означава растојање тачке U од праве VW. Одредити за коју се тачку X из равни квадрата $ABCD$ достиже минимална вредност израза $AX + BX + d(X, CD)$, и израчунати ту вредност.

4. Нека је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ дефинисана на следећи начин: ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ канонична факторизација броја n, тада важи

$$f(n) = |\{i \leqslant k : \alpha_i = 1\}|.$$

(На пример: $f(2016) = f(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 1$; $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 0$.) Да ли је за сваки природан број N могуће наћи N узастопних природних бројева таквих да за сваки број n у том низу важи $f(n) = 2016$?

5. Дато је 10 новчића поређаних у врсту. Међу њима су два лажна, и за њих је познато да су суседни. У једном питању дозвољено је одабрати скуп новчића A и питати колико има лажних међу њима. Могуће је поставити два питања, при чему ће одговори уследити тек након што оба питања буду постављена.

a) Да ли је на овај начин могуће одредити лажне новчиће?

b) Да ли је на овај начин могуће одредити лажне новчиће, уз додатно ограничење да се скуп A мора састојати од неколико узастопних новчића?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.