Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Трећи разред – А категорија

1. У скупу природних бројева решити једначину

$$11x^2 + 2016 = 11x^2y + y^2.$$

2. Одредити број парова природних бројева (a, b) таквих да важи $a \leqslant 2016$, $b \leqslant 2016$ и $a \not\equiv b \pmod{d}$ за сваки прави делилац d броја 2016 (прави делиоци су сви делиоци осим 1 и 2016).

3. Посејдон, грчки водени бог, окупио је 2016 чамџија и предложио им следећу игру. На почетку игре Посејдон ће изабрати двојицу и поставити их на две локације на бесконачно дугачкој, праволинијској реци. Чамџије потом треба да пронађу један другог (тј. да се сусретну на реци). Максимална брзина њихових чамаца износи $1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, и могу се кретати било узводно, било низводно. Сваки чамџија у сваком тренутку зна тачан положај свог чамца на реци, као и време протекло од почетка игре. Међутим, ниједан од изабраних чамџија не зна идентитет другог изабраног чамџије. Чамџије (свих 2016) имају могућност да заједнички осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу чамџијама није дозвољена. Доказати да чамџије могу осмислити стратегију која ће им гарантовати успех без обзира на то која двојица су изабрана и без обзира на њихове почетне положаје на реци.

4. Нека је дат $\triangle ABC$. Нека је тачка D средиште странице BC. Кружница γ_1 пролази кроз D и додирује праву AB у тачки B, а кружница γ_2 пролази кроз D и додирује праву AC у тачки C. Кружнице γ_1 и γ_2 се секу у тачки M, $M \not\equiv D$. Доказати да тачка симетрична тачки M у односу на праву BC лежи на правој AD.

5. Функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ је задата условима:

- $f(1) = 1$,
- $f(2n) = 2f(n)$ и
- $f(4n+1) = f(4n+3) = f(2n) + f(2n+1)$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказати да за све n важи $f(n) \geqslant \frac{n}{3}$. Када се достиже једнакост?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.