

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. јануар 2016.

Други разред – А категорија

1. а) Доказати:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

за све позитивне реалне бројеве  $a$  и  $b$  за које важи  $b < a^2$ .

- б) Да ли је вредност израза

$$\frac{5 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

рационалан или ирационалан број?

2. Наћи све природне бројеве  $n$  за које је  $n! - 44$  потпун квадрат.  
3. Наћи све парове природних бројева  $a$  и  $b$  такве да свака од квадратних једначина

$$x^2 + ax + a + b = 0$$

и

$$x^2 + bx + a + b = 0$$

има целобројна решења.

4. У  $\triangle ABC$  важи  $\angle BAC = \alpha < 90^\circ$ . На страницама  $AC$  и  $AB$  одабране су тачке  $D$  и  $E$ , редом, такве да важи  $\angle ABD = \angle ACE = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Доказати да права  $DE$  додирује кружницу уписану у  $\triangle ABC$  ако и само ако је  $\triangle ABC$  правоугли.  
5. У разреду има 16 ученика. Једног дана сваки ученик је дао своју свеску неком другом ученику (исти ученик може да прими више од једне свеске). Доказати да се може издвојити група од 6 ученика таквих да ниједан ученик из те групе није дао свеску другом ученику из групе.

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.