Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Четврти разред – А категорија

1. Колико најмање различитих комплексних нула може имати полином

$$P(x) = ax^n + x^{2014} + 1,$$

ако је a реалан број а n природан број различит од 2014?

2. Доказати да за сваки природан број n постоји n-тоцифрен природан број чије цифре су из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који је дељив збиром својих цифара.

3. Нека је, у $\triangle ABC$, B_1 средиште странице AC, B_0 подножје висине из темена B, а B_2 осносиметрична слика темена B у односу на симетралу $\measuredangle A$. Нека су P и Q тачке додира уписане и споља приписане кружнице са страницом BC, и нека је k кружница над пречником PQ. Тангента t из тачке B_2 додирује кружницу k у тачки T. Доказати да кружница описана око $\triangle B_0B_1T$ додирује праву t.

4. Дато је $2n$ тачака у равни међу којима никоје три нису колинеарне. Посматрајмо све могуће одабире од по $2n$ дужи чији су крајеви у датим тачкама (свака тачка је крај тачно једне од тих дужи) и међу којима се никоје две не секу. Доказати да је број таквих одабира бар 2^{n-1}, и одредити за које се све природне бројеве n може достићи једнакост за бар једну почетну конфигурацију од $2n$ тачака.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.