

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Трећи разред – А категорија

1. Низ  $(x_i)_{i=0}^{\infty}$  је дефинисан условима  $x_0 = 1$  и  $x_{i+1} = x_i + y_i - 1$ , где је  $y_i$  најмањи природан број који не дели  $x_i$ . Да ли важи  $x_n = 20!$  за неки природан број  $n$ ?
2. Дат је конвексан петоугао  $ABCDE$  такав да су му углови код темена  $C$  и  $E$  прави и важи  $\angle EDA = \angle CDB$ . Нека је  $N$  подножје висине из темена  $D$  у оштроуглом  $\triangle ABD$ , и нека је  $M$  средиште дужи  $AB$ . Доказати да су тачке  $C$ ,  $M$ ,  $N$  и  $E$  концикличне.
3. Нека је  $n$  фиксиран природан број. Нека је  $k$  било који природан број не већи од  $n$  и нека је  $S$  скуп неких  $k$  различитих простих бројева. Марија и Марко играју наизменично следећу игру. Свако од њих бира један природан број већи од 1 чији сви прости делиоци припадају скупу  $S$  и који није дељив ниједним од претходно изабраних бројева. Марија игра прва, а губи онај ко не може да повуче потез. Доказати да Марија има победничку стратегију за бар  $\frac{2}{3}n$  могућих вредности параметра  $k$ .
4. Ученици трећег разреда су за домаћи имали следећи задатак:

Одабрати позитивне реалне бројеве  $a$  и  $b$  и скицирати (у истом координатном систему) графике функција  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисане са  $f(x) = a^x + b$  и  $g(x) = b^x + a$ .

При прегледу домаћег задатка, дошавши до Перице, професор је рекао: „Перице, не знам које си бројеве  $a$  и  $b$  одабрао, али ниси добро скицирао графике. Наиме, није могуће да графици оваквих функција имају тачно две заједничке тачке.“ Да ли је професор у праву?

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.