Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Други разред – А категорија

1. Нека је x реалан број такав да је израз $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ дефинисан и важи

$$\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}} \leqslant 1.$$

Доказати:

$$\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}} < 2.$$

2. Нека функција obrt пресликава цифре $0,1,2,5,6,8,9$ у цифре $0,1,2,5,9,8,6$, редом. Природан број $n=\overline{t_k t_{k-1}\cdots t_1 t_0}$ називамо *обртабилан* ако су му све цифре из скупа $\{0,1,2,5,6,8,9\}$ и притом важи $t_0 \neq 0$, и дефинишемо

$$\mathrm{obrt}(n)=\overline{\mathrm{obrt}(t_0)\mathrm{obrt}(t_1)\cdots\mathrm{obrt}(t_{k-1})\mathrm{obrt}(t_k)}$$

(другим речима, функција obrt представља обртање екрана калкулатора за $180°$). Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n са следећим особинама:
1° n је обртабилан и $\mathrm{obrt}(n)=n$;
2° n^2 је обртабилан и $\mathrm{obrt}(n^2)=n^2$;
3° $41 \mid n$.

3. На сваком пољу табле $3\times n$ налази се један жетон који је са једне стране обојен бело а са друге стране црно. У почетку су сви жетони окренути црном страном нагоре. Дозвољено је у једном потезу изабрати произвољно поље и окренути све жетоне на пољима која имају бар једно заједничко теме са изабраним пољем али не и жетон на изабраном пољу. За које n је могуће да после извесног броја потеза сви жетони буду окренути белом страном нагоре?

4. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Тачка N је таква да важи $\measuredangle NBA=\measuredangle NCA=90°$, а D и E су тачке на страницама AC и AB, редом, такве да важи $\measuredangle BNE=\measuredangle CND$. Права DE сече праву BC у тачки F, а K је средиште дужи DE. Ако је X тачка пресека кружница описаних око $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$ различита од тачке A, доказати да важи $\measuredangle KXF=90°$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.