Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Први разред – А категорија

1. Нека су a, b и c произвољни природни бројеви. Доказати неједнакост

$$\text{НЗД}(a, b-1) \cdot \text{НЗД}(b, c-1) \cdot \text{НЗД}(c, a-1) \leqslant ab + bc + ca - a - b - c + 1,$$

као и да се једнакост достиже за бесконачно много тројки (a, b, c).

2. Дат је једнакокраки $\triangle ABC$, при чему важи $AB = AC$. Унутар $\triangle ABC$ уочена је тачка P таква да важи $\measuredangle BPC = 90^\circ + \frac{\measuredangle BAC}{2}$. Такође је уочена тачка Q таква да важи $\measuredangle BPQ = \measuredangle PQA = 90^\circ$. Нека је R тачка на дужи QB таква да важи $BR = 2RQ$. Доказати да су тачке R, P и C колинеарне.

3. Чувар банке има n сефова које мора да чува и сваки сеф има свој јединствен кључ који га отвара. Кључеви су по изгледу идентични. Чувар је добио на располагање довољан број идентичних кружних металних алки. На сваку алку могуће је закачити произвољан број кључева или других алки (али не могу на истом кључу бити прикачене две алке), при чему су алке такве да се, након што чувар прикачи све што жели, цикличан редослед закачених објеката на алки потом неће реметити. Чувар жели да помоћу алки споји све кључеве у једну целину на такав начин да надаље увек буде у могућности да, на основу распореда кључева и алки, идентификује кључ који му затреба за отварање одређеног сефа (без испробавања кључева на сефу). За задат број $n > 1$, одредити најмањи број алки које су потребне чувару уколико:

a) кључеви имају једну осу симетрије у равни кључа (слика лево);
b) кључеви немају ниједну осу симетрије у равни кључа (слика десно)?

4. Да ли постоји полином $P(x)$ коме нису сви коефицијенти целобројни такав да важи $P(0) = 0$ и да је $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$ цео број за свака два различита цела броја a и b?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.