Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп вредности израза
$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z}$$
уз ограничења $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$.

2. Наћи све бројеве са 31 012 015 цифара таквих да се изменом ма које цифре увек добија број који није дељив са 11.

3. На бесконачно великој табли записани су сви природни бројеви, сваки тачно по једанпут. У једном кораку дозвољено је избрисати коначно много бројева с табле, рецимо $a_1, a_2, \dots, a_n$, и уместо њих написати или број
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
или број
$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$
Доказати да је за ма који позитиван рационалан број q могуће након коначног броја описаних корака добити на табли број q.

4. Нека је C тачка на кружници k_1. Кружница k_2 са центром C сече k_1 у тачкама P и Q. Тангента из центра O кружнице k_1 на кружницу k_2 додирује k_2 у тачки N и сече k_1 у тачкама A и B, при чему важи $AN > BN$. Праве AC и PQ се секу у тачки K, а права NK сече k_2 у тачки $L \not\equiv N$. Доказати: $AL \perp PQ$.

5. Да ли постоји растући низ природних бројева $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такав да се сваки природан број $m \in \mathbb{N}$ може на јединствен начин представити у облику $m = a_i - a_j$ за неке $i, j \in \mathbb{N}$?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.