

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да за све реалне бројеве t важи

$$\lfloor t \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor 3t \rfloor.$$

(За реалан број x , са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x .)

2. У скупу \mathbb{R} решити једначину

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2.$$

3. На природном броју n спроводимо следећу операцију: последњу цифру декадног записа броја n множимо са 4 и то саберемо са бројем који се добија брисањем те последње цифре (на пример, на тај начин од броја 1345 добијамо број $4 \cdot 5 + 134 = 154$; специјално, уколико је број n једноцифрен, узимамо да нам након брисања те његове једине цифре остаје број 0, па оваквом операцијом од њега добијамо број $4n$). Овај поступак настављамо са сваким новодобијеним бројем, неограничен број пута. Претпоставимо да је у неком кораку добијен број 2015. Доказати да се међу свим бројевима који су били добијени у неком претходном моменту, као и међу свим бројевима који ће тек уследити, не налази ниједан прост број.
4. Нека су AA_1 и CC_1 тежишне дужи у $\triangle ABC$. На страници AC одабрана је произвољна тачка P , и кроз њу су повучене праве паралелне са AA_1 и CC_1 . Ове праве секу странице BC и AB у тачкама E и F , редом. Доказати да дужи AA_1 и CC_1 деле дуж EF на три једнака дела.
5. Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за осам већа од најмање цифре?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.