

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $p \geq 3$ прост број. Доказати:

$$p^2 \mid \left(\frac{p^2 + 1}{2}\right)^p + ((p - 3)!)^{1+(p-1)!}.$$

2. Одредити све вредности параметра c за које систем једначина:

$$x^2 - yz = 1;$$

$$y^2 - zx = 2;$$

$$z^2 - xy = c$$

има решење у скупу ненегативних реалних бројева.

3. У конвексном четвороуглу дужине свих страница и дијагонала су рационални бројеви. Да ли тада и дужине одсецака дијагонала на које их дели њихова пресечна тачка морају бити рационални бројеви?
4. На табли је на почетку записан број 1. У n -том кораку спроводи се следећи поступак: сваки број на табли се обрише и уместо њега се запише низ бројева, и то тако што се, уколико је обрисан број i , уместо њега напише низ $1, 2, \dots, i - 1$ (специјално, уколико је обрисан број 1, уместо њега се у овом моменту не уписује ништа); потом се додатно на таблу допише број $n + 1$. Одредити колико ће бројева бити на табли након 2015 оваквих корака.
5. У конвексном четвороуглу $ABCD$ познати су углови: $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle BDA = 20^\circ$ и $\angle BDC = 25^\circ$. Одредити угао који заклапају дијагонале тог четвороугла.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.