

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Други разред – А категорија

1. Решити систем једначина:

$$uv = 3u - v + 1;$$

$$vw = 3v - w + 1;$$

$$wu = 3w - u + 1.$$

2. Пред Рајом Ратком на табли стоји записан природан број у коме су сунђером обрисане две цифре између којих се налази паран број (познатих) цифара. Раја зна остатке полазног броја при дељењу са 9 и са 11 и покушава да открије две обрисане цифре. Испоставило се да Раја није у могућности да открије цифре које недостају, тј. постоји више уређених парова цифара (x, y) таквих да се, за сваки такав уређен пар, уписивањем цифара из тог уређеног пара на место обрисаних цифара добија број који при дељењу са 9 и са 11 даје управо оне остатке који су познати Раји. Одредити између којих могућности за уређен пар (x, y) Раја Ратак не може да се определи.
3. У $\triangle ABC$ важи $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle CBA = 15^\circ$. На продужетку странице AC преко тачке C уочена је тачка M таква да важи $CM = 2AC$. Одредити $\angle AMB$.
4. Дат је $\triangle ABC$ у ком важи $\angle C = 90^\circ$. Нека је P тачка на краћем луку AC кружности описане око $\triangle ABC$. Нормала из тачке C на праву CP сече праве AP и BP у тачкама K и L , редом. Доказати да однос површина $\triangle BKL$ и $\triangle ACP$ не зависи од избора тачке P .
5. Нека је уочен природан број n дељив са 8. Посматрајмо све подскупове скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ чија је кардиналност дељива са 4 или даје остатак 1 при дељењу са 4. Нека је број таквих подскупова једнак m . Показати да m у бинарном запису садржи тачно две цифре 1.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.