

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Први разред – А категорија

1. На табли је записан позитиван реалан број x . У једном кораку дозвољено је урадити следеће: уколико је на табли већ записан број a , дозвољено је дописати неки од бројева $a + 1$ или $\frac{1}{a}$, или, уколико су на табли већ записани бројеви a и b за које важи $a > b$, тада је дозвољено дописати неки од бројева $a + b$ или $a - b$. Доказати да је после коначно много корака могуће добити на табли број x^2 .
2. Нека је $P(n)$ производ свих цифара природног броја n . Наћи све природне бројеве n за које важи $n = P(n) + 18$.
3. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да природни бројеви c и d такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ постоје ако и само ако је бар један од бројева a и b паран.
4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама P и Q , при чему кружница k_1 пролази кроз центар кружнице k_2 . Различите тачке A и B леже на делу кружнице k_1 који је унутар k_2 и притом су једнако удаљене од центра кружнице k_2 . Ако права PA сече k_2 у тачки $D \neq P$, доказати да тада важи $AD = PB$.
5. У биоскопску салу која има 2015 места ушло је 2014 посетилаца, међу којима је и Мика. Сви ови посетиоци сели су на произвољна места, не обазирјући се на то које место им је намењено према карти. На пола филма у салу улази 2015. посетилац. Он жели да седне баш на своје место према карти, и уколико је оно заузето, подићи ће с тог места гледаоца који ту седи. Подигнути гледалац потом гледа које је његово седиште, и ако је оно заузето, и он ће подићи гледаоца који седи на његовом месту. Овакав поступак се наставља све док не буде подигнут гледалац коме је према карти додељено место које је слободно (и он ће тада сести на то место). Нека је a број оних почетних распореда за које ће током читавог овог комешања и Мика у неком моменту бити подигнут, а b број преосталих почетних распореда. Који од следећа три односа важи: $a > b$, $a = b$ или $a < b$?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.