

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

15.3.2014.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$$

дељив са 13 за сваки природан број n .

2. Раван π пресеца бочне ивице правилне четворостране пирамиде у тачкама A , B , C и D које се налазе на удаљеностима a , b , c и d , редом, од врха пирамиде. Доказати да важи једнакост

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

3. Доказати да је за сваки природан број n већи од 1 број

$$n \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^{n-2} + \dots + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1$$

дељив са 2^n .

4. Дат је једнакостранични троугао. Колико има елипси које се могу описати око датог троугла?

5. Три математичара имају шешире на којима су написани неки природни бројеви. Њима је познато да је један од бројева једнак збиру друга два броја, и при томе сваки математичар види бројеве исписане на шеширима друге двојице, али не и на свом. Први каже: „Ја не знам који је број на мом шеширу”, на шта други изјављује: „Ни ја не знам који је број на мом”. Затим први констатује: „Ја сада знам који је број на мом шеширу”, а други закључује: „Онда на мом шеширу мора бити број 2014”. Који су бројеви написани на шеширима?

Време за рад 240 минута.

Решења задатака детаљно образложити.