

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

15.3.2014.

Четврти разред – А категорија

1. За целе бројеве  $a$ ,  $b$  и  $c$  бројеви  $a + b + c$ ,  $a^2 + b^2 + c^2$  и  $a^3 + b^3 + c^3$  дељиви су са 2013. Доказати да

$$2013^3 \mid abc(a - b)(b - c)(c - a).$$

2. Дати су позитивни бројеви  $a$ ,  $b$  и  $c$  такви да важи  $ab + bc + ca = 3$ . Доказати неједнакост

$$\frac{1}{4 + (a + b)^2} + \frac{1}{4 + (b + c)^2} + \frac{1}{4 + (c + a)^2} \leq \frac{3}{8}.$$

3. Права  $\ell$  садржи средиште  $M$  странице  $BC$  троугла  $ABC$  и сече праве  $AB$  и  $AC$  у тачкама  $D$  и  $E$ , редом. Нека је  $K$  средиште дужи  $DE$ . Доказати да растојање од тачке  $D$  до праве  $AK$  није веће од  $BC/2$ .
4. На папиру је нацртан правилан шестоугао. Аца и Воја наизменично бирају по једну тачку са руба тог многоугла, при чему Аца тачку увек боји плавом, а Воја црвеном бојом (свака тачка може бити одабрана највише једном). Аца игра први. Игру добија играч који први оствари да међу тачкама које је до тада обојио постоје три које чине темена једнакостраничног или темена једнакокрако правоуглог троугла. Да ли неки од играча има победничку стратегију?

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.