

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

15.3.2014.

Други разред – Б категорија

1. Да ли постоји комплексан број z који није реалан такав да су бројеви

$$z^{15} - \frac{1}{z^{15}}, \quad z^3 - \frac{1}{z^3} \quad \text{и} \quad z^{2014} - \frac{1}{z^{2014}}$$

реални?

2. Нека је BD висина троугла ABC . Тачке M и N изабране су у равни троугла ABC тако да важи $AN \perp AB$, $CM \perp BC$, $AN = DC$ и $CM = AD$. Доказати да је $BM = BN$.

3. Одредити све природне бројеве m , n и p такве да важи

$$m! + n! = 5^p.$$

(За $k \in \mathbb{N}$ је $k! = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.)

4. На папиру је нацртана кружница. Аца и Воја наизменично бирају по једну тачку са кружнице, при чему Аца тачку увек боји плавом, а Воја увек црвеном бојом (свака тачка може бити одабрана највише једном). Аца почиње игру. У игри побеђује играч који први оствари да међу тачкама које је до тада обојио постоје три које чине темена једнакостраничног или темена једнакокрако правоуглог троугла. Да ли неки од играча може играти тако да победи без обзира на то како игра други играч?

5. Одредити број различитих начина да топ стигне од левог доњег до десног горњег поља табле 3×7 , уколико је дозвољено да се креће само удесно и нагоре.

(Топ је фигура која се у једном потезу помера са поља A на поље које се налази у истој врсти или колони као поље A . Два кретања топа су различита уколико се у другој кретњи топ зауставља на барем једно поље на које се није зауставио у првој кретњи.)

Време за рад 240 минута.

Решења задатака детаљно образложити.