**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## 15.3.2014.

### Трећи разред – Б категорија

**1.** Нека је $n$ природан број. Одредити најмањи природан број $a$ за који систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & a \\ {x_1}^{2014} & + & {x_2}^{2014} & + & \ldots & + & {x_n}^{2014} & = & a \end{array}$$

нема целобројних решења.

**2.** У комплексној равни дат је једнакостраничан троугао. Ако једном темену овог троугла одговара комплексан број $\sqrt{3}+5i$, а центру троугла комплексан број $2i$, одредити комплексне бројеве који одговарају преосталим теменима троугла.

**3.** Наћи све природне бројеве $n$ за које постоји природан број $x$ тако да

$$2014 \mid (3x+16)^n - 2015.$$

**4.** У равни су дате праве $p$, $q$ и $r$ и тачке $P_1, P_2, P_3 \in p$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in q$ и $R_1, R_2, R_3 \in r$ такве да је $P_2$ између $P_1$ и $P_3$, $Q_2$ између $Q_1$ и $Q_3$, $R_2$ између $R_1$ и $R_3$, при чему важи

$$P_1P_2 : P_2P_3 = Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = R_1R_2 : R_2R_3.$$

Доказати да су тежишта троуглова $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$ и $P_3Q_3R_3$ колинеарна.

**5.** У низ је поређано 2014 сијалица. Испод сваке сијалице налази се прекидач. Притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем $i$, за $1 < i < 2014$, мења се стање сијалица са редним бројевима $i-1$, $i$ и $i+1$; притиском на прекидач испод прве сијалице мења се стање прве и друге сијалице, док се притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем 2014 мења стање сијалица са редним бројевима 2013 и 2014.
а) Ако су на почетку све сијалице угашене да ли се низом потеза може добити да све сијалице буду упаљене?
б) Ако је на почетку једна сијалица упаљена, а преосталих 2013 угашено, да ли се без обзира која је сијалица упаљена може доћи до стања у којем су све сијалице упаљене?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.