

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

15.3.2014.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC је $AB = AC$. Тачке D , E и F изабране су на страницама BC , CA и AB , редом, тако да праве EF и BC нису паралелне и да важи $\sphericalangle EDF = \sphericalangle ABC$. Доказати да права BC додирује описану кружницу троугла DEF ако и само ако је D средиште странице BC .
2. За непразне подскупове A и B скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ пишемо $A < B$ ако је сваки елемент скупа A мањи од сваког елемента скупа B . Доказати да је број парова непразних подскупова (A, B) скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ таквих да је $A < B$ једнак $(n - 2) \cdot 2^{n-1} + 1$.
3. Одредити све $n \in \mathbb{Z}$ такве да се из скупа $\{n, n+1, \dots, n+2014\}$ може избацити један број, тако да се остали бројеви могу поделити на два дисјунктна скупа A и B , за које је $|A| = |B|$ и

$$\sum_{k \in A} k^2 = \sum_{k \in B} k^2.$$

4. Одредити све природне бројеве n такве да

$$3^n - 2^n \mid 6^n + 3^n + 1.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.