

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије  
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
15.3.2014.

Други разред – А категорија

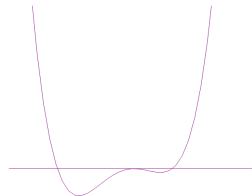
1. Да ли постоји коначно или бесконачно много природних бројева  $m$  за које постоје природни бројеви  $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$  такви да је

$$a_1! + a_2! + \dots + a_{2014}! = m!?$$

2. Перица је замислио три реална броја  $a$ ,  $b$  и  $c$  и у свесци скицирао график функције  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  за коју је

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a).$$

Његов млађи брат Микица је искористио прилику када Перица није био код куће и са скице избрисао  $y$  осу. Наредног дана Перица је приметио да његовој скици недостаје  $y$  оса. Покушао је да се присети функције чији је график скицирао. Успео је да се сети да је функција облика  $f(x) = (ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a)$ , али није успео да се сети вредности бројева  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Да ли је могуће да Перица конструише  $y$  осу, ако је у свесци пронашао скицу приложу на слици? Претпоставља се да је Перица првобитно тачно скицирао график функције.



3. Нека је  $M$  средиште лука  $BC$  описане кружнице  $k$  троугла  $ABC$  који не садржи тачку  $A$ . Споља приписана кружница троугла  $ABC$  наспрам темена  $A$ , са центром  $S$ , додирује страну  $BC$  у тачки  $D$ . Ако права  $MD$  сече кружницу  $k$  у тачки  $P$  ( $P \neq M$ ) доказати да је  $\sphericalangle APS = 90^\circ$ .
4. У низу је дато  $n \geq 3$  сијалица. Испод сваке сијалице налази се прекидач. Притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем  $i$ ,  $1 < i < n$ , мења се стање сијалица са редним бројевима  $i - 1$ ,  $i$  и  $i + 1$ ; притиском на прекидач испод прве сијалице мења се стање прве и друге сијалице, док се притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем  $n$  мења стање сијалица са редним бројевима  $n - 1$  и  $n$ . Одредити све природне бројеве  $n$  за које је без обзира на почетно стање сијалица могуће у коначно много потеза добити стање у којем су све сијалице упаљене.

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.