

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

15.3.2014.

Први разред – А категорија

1. За бројеве a, b, c, x, y и z важи $\{a, b, c\} = \{x, y, z\} = \{15, 3, 2014\}$. Да ли број

$$a^{b^c} + x^{y^z}$$

мора бити сложен?

(За $m, n, k \in \mathbb{N}$ је са m^{n^k} означен број $m^{(n^k)}$.)

2. Нека су a, b и c странице, S површина, R полупречник описане кружнице и M тачка у унутрашњости троугла ABC . Означимо са d_a, d_b и d_c растојања тачке M од правих које садрже странице троугла ABC . Доказати да важи неједнакост

$$2S \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{R} \right) > d_a + d_b + d_c.$$

3. На столу се налази гомила са n жетона. Два играча, А и Б, наизменично играју, при чему играч А игра први. У сваком потезу играч или узима један жетон са неке од гомила или дели неку од гомила на неколико гомила (барем две) са међусобно једнаким бројем жетона (ако играч узме последњи жетон са гомиле она престаје да постоји). Победник је играч који узме последњи жетон са стола. За које вредности броја n играч А има победничку стратегију, а за које вредности броја n играч Б има победничку стратегију?
4. Одредити све полиноме $R(x)$ чији су сви коефицијенти из скупа $\{-1, 1\}$ и за које важи $R(3) = 130$ и $R(-2) = -45$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.