Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све тројке позитивних реалних бројева (a, b, c) такве да једначина
$$a^x + b^x + c^x = 3$$
има барем три различита решења у скупу реалних бројева.

2. За природне бројеве k и n означимо са $d_k(n)$ број делилаца броја n не мањих од k. Одредити
$$d_1(2015) + d_2(2016) + d_3(2017) + \ldots + d_{2014}(4028).$$

3. Одредити највећи природан број k такав да постоји природан број $n \geqslant k$ за који је сваки од бројева
$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$$
потпун квадрат.

4. На кружници k_0 дате су тачке A, B и C. Кружнице k', k'' и k''' нормалне су на кружницу k_0, и притом k' пролази кроз A и B, k'' кроз A и C, а k''' кроз B и C. На кружници k''' дата је тачка $P \notin \{B, C\}$, а потом су повучене кружнице k_1 и k_2 које пролазе кроз P и које су нормалне на k_0, при чему је k_1 нормална и на k', а k_2 на k''. Доказати да су кружнице k_1 и k_2 међусобно нормалне. (Кружнице γ_1 и γ_2 су нормалне ако се секу у тачкама X и Y и при томе су њихове тангенте у тачки X међусобно нормалне.)

5. Играчи A и B наизменично замењују звездице у
$$\star 1 \star 2 \star 2^2 \star 2^3 \star \ldots \star 2^{999} \star 2^{1000}$$
знацима $+$ и $-$. Играч B побеђује ако је по завршетку игре вредност добијеног израза дељива са 17. У супротном побеђује играч A. Ако играч A почиње игру, како треба да игра да би сигурно победио?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.